



گزینه ۱

۱

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) &= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) = 1$$

گزینه ۳

۲

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

$$= \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \sin 2x = \cos 2x$$

$$\xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} 1 + \frac{1}{2} \sin 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \left(\frac{1}{2} + 2\sin^2 x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} x = 0, x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} + 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ است، پس $\sin 2x = -\frac{1}{4}$ غیرقابل قبول می باشد.
بنابراین معادله دو جواب دارد.

گزینه ۱

۳

$$3x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \neq \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

• $\cos \alpha > 0$ ، در نتیجه α در ربع اول یا چهارم قرار دارد.

مثبت، زیرا $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

$$\tan \alpha - \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha = \frac{\sin \alpha \overbrace{(1 - \cos \alpha)}^{\uparrow}}{\underbrace{\cos \alpha}_{\downarrow \text{مثبت}}} < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

چون $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ ، لذا α زاویه‌ای در ربع چهارم است.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

وقتی برای زاویه علامت درجه قرار نمی‌گیرد، باید با رادیان خوانده شود.

$$\tan 2 \simeq 114/6^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan 2 < 0$$

$$\cot 5 \simeq 286/5^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cot 5 < 0$$

$$\sin 7 \simeq 401/1^\circ \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin 7 > 0$$

$$\cos 4 \simeq 229/2^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos 4 < 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{3} \\ -\cos \frac{x}{3} = -\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}) = \sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi \\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{x}{3} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{12k\pi}{5} + \frac{9\pi}{5} \end{cases}$$

تنها جواب معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ، $x = \frac{9\pi}{5}$ است.

ابتدا به دلیل وجود $\sqrt{x}$ باید داشته باشیم: $x \geq 0$. حال دامنه تابع y برابر است با:

$$\{x \geq 0 \mid \frac{\pi}{\omega + \sqrt{x}} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

باید x هایی که به ازای آن‌ها $k \in \mathbb{Z}$ و $\frac{\pi}{\omega + \sqrt{x}} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ است را پیدا کرده و از دامنه $x \geq 0$ خارج کنیم:

$$\frac{\pi}{\omega + \sqrt{x}} = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div \pi} \frac{1}{\omega + \sqrt{x}} = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow \omega + \sqrt{x} = \frac{2}{2k+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{2k+1} - \omega \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-10k-3}{2k+1}$$

باتوجه به اینکه $\sqrt{x}$ نامنفی است، باید $\frac{-10k-3}{2k+1}$ نیز نامنفی باشد:

$$\frac{-10k-3}{2k+1} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k \leq -\frac{3}{10} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$$

بنابراین هیچ x ای وجود ندارد که بخواهیم آن را از بازه $x \geq 0$ خارج کنیم، پس دامنه تابع y ، همان $x \geq 0$ است.

$$\cos x = \cos^2 x + 3 \cos x \Rightarrow \cos^2 x + 2 \cos x = 0$$

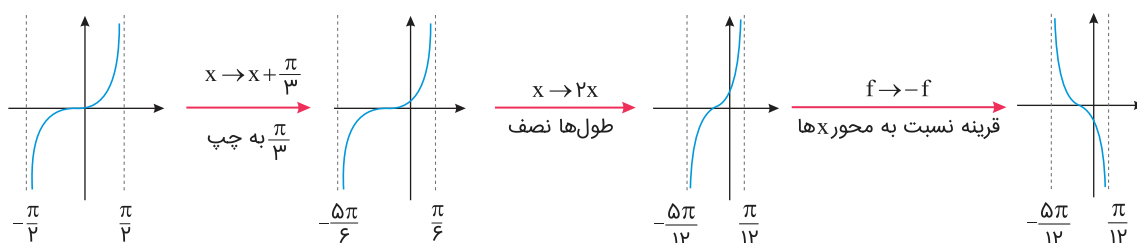
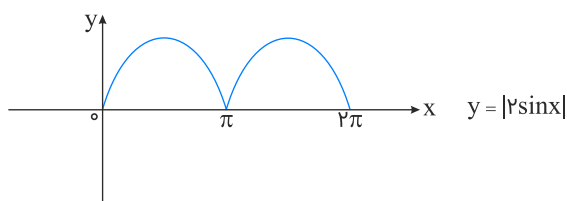
$$\Rightarrow \cos x (\cos x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1$$

$$= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = \underbrace{1 - \sin^2 x}_{\cos^2 x} + \cos^2 x = 2\cos^2 x$$

وقتی در (-1) ضرب شود، نسبت به محور x ها قرینه می‌شود و گزینه "۴" صحیح است.



باتوجه به اینکه دوره تناوب این تابع $\frac{3\pi}{14} - (\frac{-11\pi}{14}) = \pi$ است، پس گزینه‌های "۲" و "۴" حذف می‌شوند زیرا دوره تناوب آن‌ها 2π است. در گزینه "۱"، به ازای $x = \frac{3\pi}{14}$ و $x = \frac{-11\pi}{14}$ تابع دارای max و در گزینه "۳"، به ازای $x = \frac{3\pi}{14}$ و $x = \frac{-11\pi}{14}$ تابع دارای min است. باتوجه به اینکه نمودار تابع در این نقاط دارای min است پس گزینه "۳" درست است.

$$y = \frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\tan^4 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)} = \frac{\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\tan^4 \theta (\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^2 \theta)})} = \frac{\frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta}}{\tan^4 \theta (\frac{\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta})}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\tan^4 \theta (\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta})} = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\tan^4 \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{\tan^4 \theta} = \tan \theta$$

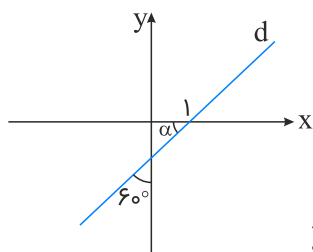
دوره تناوب $y = \tan \theta$ برابر است با $T = \pi$.

روش دوم: نکته:

$$\begin{cases} \tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta \\ \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\tan^2 \theta \sin^2 \theta}{\tan^4 \theta (\cot^2 \theta \cos^2 \theta)} = \frac{\tan^2 \theta \sin^2 \theta}{\tan^2 \theta \cos^2 \theta} = \tan \theta$$

می‌دانیم $m = \tan \alpha$ و α زاویه خط با جهت مثبت محور x هاست. طبق شکل $\alpha = 30^\circ$ ، پس $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ شیب و خط از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند:



$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1, 0)} b = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{عرض از مبدأ}$$

$$\sin 2x(1 + \tan^2 x) = 2 \tan x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \sin 2x \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x(\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} & (1) \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi & (2) \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $\frac{k\pi}{2}$ است که تنها عضو آن در بازه $(0, \pi)$ عدد $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد که این عدد هم در معادله صدق نمی‌کند، زیرا در دامنه آن قرار ندارد. پس معادله جوابی ندارد.

می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ پس $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. همچنین $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ پس داریم:

$$\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\sin(\theta - 2\pi) = -\sin(2\pi - \theta) = -(-\sin(\theta)) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta - 2\pi) = \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{-\sin \theta - \cos \theta} \stackrel{\div \sin \theta}{=} \frac{1 + \cot \theta}{-1 - \cot \theta} = \frac{1 + 0/3}{-1 - 0/3} = \frac{1/3}{-1/3} = -1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 3\cos^2 \theta - 1 = 3 \times \frac{2}{16} - 1 = \frac{-5}{8}$$

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x + 1 - 1 \Rightarrow f(x) = (\sin x + 1)^2 - 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ می‌دانیم:}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq \underbrace{(\sin x + 1)^2 - 1}_{f(x)} \leq 3 \Rightarrow R_f = [-1, 3]$$